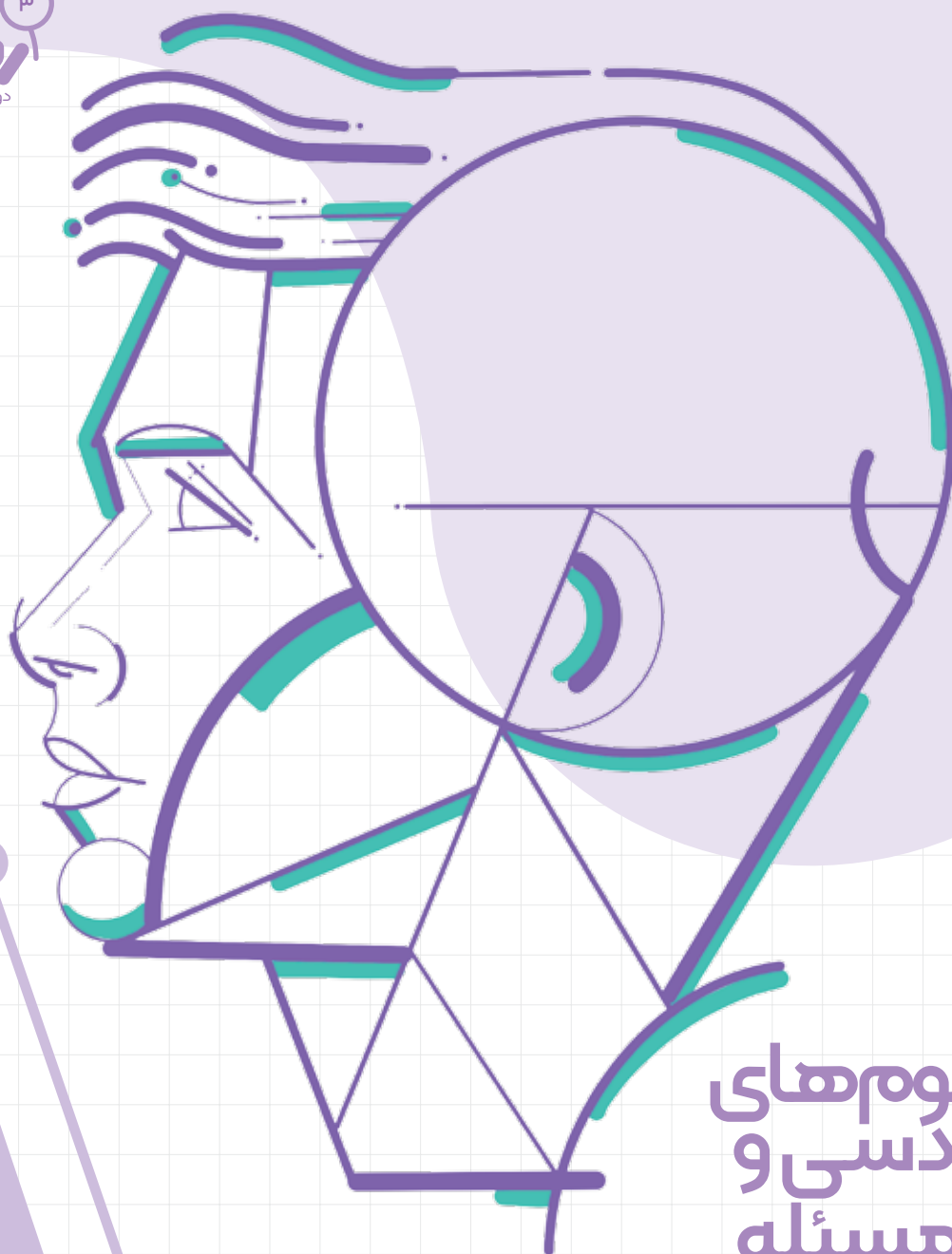




مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

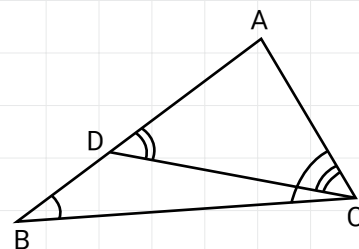
نامساوی‌های مهم در مثلث و کاربردهای آن در حل مسئله

● محمود نصیری

در بخش‌های قبلی، قضیهٔ زاویهٔ بیرونی در مثلث را بیان و ثابت کردیم، یکی از کاربردهای این قضیه، اثبات یکتایی خط عمود است. اما کاربرد مهم‌تر این قضیه در اثبات نامساوی‌هایی در مورد اندازه‌های ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث است که در بخش قبلی به دو مورد آن اشاره کردیم. اکنون سعی می‌کنیم آن‌ها را ثابت و مسئله‌هایی را حل کنیم.

قضیه ۱. مثلث با ضلع‌های نامساوی: در هر مثلث اگر ضلعی از ضلع دیگر بزرگ‌تر باشد، زاویه مقابل آن نیز از زاویه مقابل به آن ضلع دیگر بزرگ‌تر است.

◀ شکل ۱



اثبات: در مثلث ABC با توجه به شکل ۱ داریم: $AB < AC$. در نتیجه: $\angle C > \angle B$. شما چه ایده‌ای برای اثبات پیشنهاد می‌کنید؟ قبلاً مفهوم نامساوی را در مورد عددهای حقیقی، پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها شرح دادیم. وقتی $AB > AC$ نقطه‌ای مانند D روی پاره‌خط AB هست که داریم: $AB = AD + DB$. حال اگر نقطه D را چنان در نظر بگیریم که: $AD = AC$ ، مثلث ADC متساوی الساقین است. در نتیجه: $\angle ADC \cong \angle ACD$. فکر می‌کنید چقدر به اثبات نزدیک شده‌اید؟

چگونه از تعریف نامساوی بودن دو زاویه استفاده می‌کنید؟ آیا رابطه $\angle ADC < \angle ACB$ درست است؟

چگونه از $\angle ACD < \angle ACB$ آن را نتیجه می‌گیرید؟

حال از نامساوی $\angle ADC < \angle ACB$ ، یعنی $\angle ADC < \angle C$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا به $\angle B < \angle C$ رسیده‌اید؟

از چه قضیه مهمی استفاده می‌کنید؟ بله، اکنون نوبت استفاده از قضیه زاویه بیرونی است. در مثلث DBC، زاویه بیرونی نظیر رأس D است، در نتیجه: $\angle ADC > \angle B$.

حال نامساوی‌های $\angle C > \angle ADC > \angle B$ را داریم. در نتیجه: $\angle C > \angle B$. از چه ویژگی نامساوی‌ها استفاده کرده‌اید؟ آیا مشابه نامساوی‌های عددهای حقیقی است؟ از $a > b > c$ نتیجه می‌شود: $a > c$.

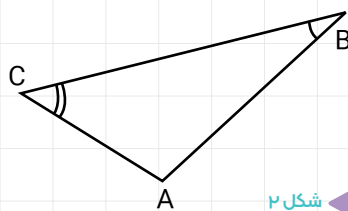
عکس قضیه

قبلاً در مورد عکس یک قضیه اشاره‌هایی داشته‌ایم. هر قضیه از دو بخش تشکیل می‌شود که بخش اول «فرض» نامیده می‌شود و همان معلوم‌های قضیه یا مسئله است. بخش دوم «نتیجه» یا «حکم» نامیده می‌شود. در واقع هر آنچه را که باید ثابت کنیم، حکم می‌نامند. اکنون اگر جای فرض و حکم را در قضیه یا در مسئله با هم جابه‌جا کنیم، قضیه به‌دست آمده را عکس آن قضیه می‌نامند.

در قضیه قبل، در $\triangle ABC$ ، $AB > AC$ فرض قضیه و $\angle C > \angle B$ حکم قضیه است. اگر در مثالی از: $\angle C > \angle B$ نتیجه بگیریم: $AB > AC$ ، آنگاه عکس قضیه را ثابت کرده‌ایم. بنابراین عکس قضیه مثلث با ضلع‌های نامساوی قضیه زیر است که آن را قضیه مثلث با زاویه‌های نامساوی می‌نامیم.

قضیه ۲. مثلث با زاویه‌های نامساوی

در هر مثلث اگر زاویه‌ای از زاویه دیگر بزرگ‌تر باشد، آنگاه ضلع مقابل آن نیز از ضلع مقابل زاویه دیگر بزرگ‌تر است.



◀ شکل ۲

اثبات: در مثلث ABC شکل ۲، فرض کنیم: $\angle B > \angle C$. باید ثابت کنیم: $AB > AC$.

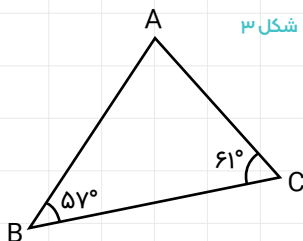
اینجاست که با تناقض به‌سادگی می‌توانیم به نتیجه برسیم. فرض کنیم $AB \leq AC$ بزرگ‌تر از AC نباشد. با نمادها می‌نویسیم: $AB \leq AC$. پس دو حالت داریم: $AB = AC$ یا: $AB < AC$.

اگر $AB = AC$ ، بنا بر قضیه مثلث متساوی الساقین داریم: $\angle B \cong \angle C$ که متناقض با فرض $\angle C > \angle B$ است. اگر $AB < AC$ ، آنگاه بنا بر قضیه ۱ داریم: $\angle C < \angle B$ و این نیز متناقض با فرض $\angle C > \angle B$ است.

بنابراین: $AB = AC$ و $AB < AC$ نمی‌تواند درست باشند. در نتیجه: $AB > AC$. بنابراین اثبات کامل است.

مثال: در $\triangle ABC$ شکل ۳، دو زاویه $\angle B$ و $\angle C$ به ترتیب 57° و 61° درجه هستند. اندازه‌های ضلع‌ها را به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.

◀ شکل ۳



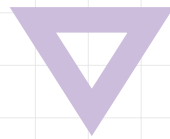
پاسخ: اندازه $\angle A$ می‌شود:

$$180 - (57 + 61) = 62$$

پس اندازه‌های سه زاویه $\angle A$ ، $\angle C$ و $\angle B$ به ترتیب 62° ، 61° و 57° است. یعنی: $\angle A < \angle C < \angle B$ و در نتیجه:

$$AC < AB < BC$$

نتیجه: در هر مثلث، کوچک‌ترین زاویه مقابل کوچک‌ترین ضلع مثلث است و برعکس. چرا؟



صورت می‌توانیم بگوییم از دو پاره‌خط AB که مقابل $\angle D_1$ است و پاره‌خط BD که مقابل $\angle A_1$ است، کدام بزرگ‌تر یا کوچک‌تر است.

اکنون نوبت استفاده از زاویه بیرونی است. مثلث ADC را در نظر بگیرید. چرا: $\angle A_2 > \angle D_1$ ؟ چه ارتباطی بین این دو زاویه وجود دارد؟

در واقع اساس اثبات همین است. آیا از این نامساوی نتیجه می‌گیریم که نامساوی $\angle D_1 > \angle A_1$ هم درست است؟ چرا؟

فکر می‌کنم اثبات کامل شده است. فقط کافی است قضیه ۲ را به کار ببرید. در نتیجه: $AB > BD$. همین روش را دوباره به کار ببرید و نشان دهید: $AC > DC$. با انجام این فعالیت شما یکی از ویژگی‌های نیمساز در مثلث را ثابت کرده‌اید. آیا می‌توانید این ویژگی را بدون به‌کاربردن نمادها بیان کنید؟

ابتدا سعی کنید هر چند ناقص، خودتان آن را بیان کنید و سپس آن را در جمله زیر مشاهده کنید:

در هر مثلث، پای نیمساز یک زاویه، ضلع مقابل آن زاویه را به دو بخش با یک نقطه مشترک تقسیم می‌کند که هر بخش از ضلع مجاور آن کوچک‌تر است.

در قسمت بعد خواهیم دید که می‌توانیم به کمک این ویژگی، اثباتی برای یک نامساوی

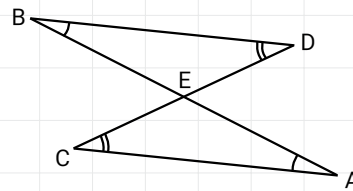
در مثلثی بیان کنیم که

یک نامساوی بین

ضلع‌های آن

مثلث

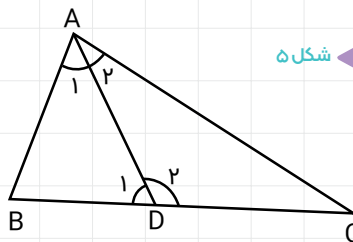
است.



شکل ۴

از چه قضیه‌ای استفاده می‌کنید؟ اکنون دو نامساوی را که نامساوی بین دو عدد است با هم جمع کنید. به نتیجه مورد نظر می‌رسید. مشاهده می‌کنید که: $AB > CD$. اندازه پاره‌خط AB از اندازه پاره‌خط CD بزرگ‌تر است.

فعالیت ۳. در $\triangle ABC$ ، نیمساز زاویه A را رسم می‌کنیم (شکل ۵). فرض کنید D پای نیمساز روی ضلع BC باشد. در واقع نقطه D ضلع BC را به دو پاره‌خط BD و DC تقسیم می‌کند که D در هر دو مشترک است.



شکل ۵

اکنون از دو پاره‌خط BD و AB کدام بزرگ‌تر است؟ به همین ترتیب از دو پاره‌خط DC و AC کدام بزرگ‌تر است؟ چرا؟ می‌دانیم: $\angle A_1 \cong \angle A_2$ ، چون $\overline{AD}$ نیمساز است. پس $\angle A_1$ و $\angle A_2$ هم اندازه‌اند.

مسلماً برای مقایسه ضلع‌های AB و BC در مثلث ABD باید $\angle D_1$ و $\angle A_1$ مقایسه شوند. اگر بتوانیم ثابت کنیم از این دو زاویه کدام بزرگ‌تر است، در این

در واقع قضیه‌های ۱ و ۲ ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث را بر حسب اندازه‌ها مرتب می‌کنند:

$AC < AB < BC \Leftrightarrow \angle B < \angle C < \angle A$
علامت $\Leftrightarrow$ یعنی سمت راست، سمت چپ را نتیجه می‌دهد و سمت چپ نیز سمت راست را نتیجه می‌دهد.

فعالیت ۱. نشان دهید در هر مثلث غیرمتساوی‌الاضلاع، حداقل یک زاویه وجود دارد که اندازه‌اش کمتر از 60° است و حداقل یک زاویه وجود دارد که اندازه‌اش بزرگ‌تر از 60° است.

ابتدا سعی کنید با توجه به قضیه‌ها و مفهوم‌های قبلی و اینکه می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث برابر 180° است، پاسخی قانع‌کننده بیابید. فرض کنید در هر مثلث غیرمتساوی‌الاضلاع هیچ زاویه‌ای کوچک‌تر از 60° وجود نداشته باشد. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا چنین فرضی امکان دارد؟ چرا؟ مسلماً پاسخ خواهید داد که در این صورت مجموع اندازه‌های زاویه‌های مثلث از 180° بیشتر می‌شود که امکان ندارد.

به همین ترتیب اگر فرض کنید در هر مثلث غیرمتساوی‌الاضلاع هیچ زاویه‌ای بزرگ‌تر از 60° وجود نداشته باشد، مشابه قبلی نشان دهید که این هم غیرممکن است.

فعالیت ۲. در شکل ۴ دو پاره‌خط AB و CD در نقطه E متقاطع‌اند. اگر داشته باشیم: $\angle D > \angle B$ و: $\angle C > \angle A$ فکر می‌کنید از دو پاره‌خط AB و CD کدام بزرگ‌تر از دیگری است؟ چرا: $BE > ED$ و $AE > CE$ ؟